Kompleksna analiza

Pavle Pandžić, 4. predavanje

Prisjetimo se

Prošli smo put dokazali:

Prisjetimo se

Prošli smo put dokazali:

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za krug). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Prisjetimo se

Prošli smo put dokazali:

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za krug). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Prisjetimo se

Prošli smo put dokazali:

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za krug). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Sada želimo dokazati da f ima derivaciju svakog reda, i da su te derivacije dane sličnom formulom. Za to trebamo sljedeću lemu o deriviranju pod znakom integrala.

Lema

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Neka je $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija.

Lema

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Neka je $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija.

Pretpostavimo da je f diferencijabilna po z, te da je parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z)$ neprekidna.

Lema

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Neka je $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija.

Pretpostavimo da je f diferencijabilna po z, te da je parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z)$ neprekidna.

Tada je funkcija

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \int_a^b f(t, z)dt$$

diferencijabilna na Ω i vrijedi

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)dt.$$

Dokaz

Prisjetimo se da iz Integrala funkcija više varijabli znamo analognu tvrdnju za realne funkcije:

Dokaz

Prisjetimo se da iz Integrala funkcija više varijabli znamo analognu tvrdnju za realne funkcije:

Neka je $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za sve $(t, x) \in [a, b] \times [c, d]$ postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$, i da je $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$ neprekidna funkcija na $[a, b] \times [c, d]$.

Dokaz

Prisjetimo se da iz Integrala funkcija više varijabli znamo analognu tvrdnju za realne funkcije:

Neka je $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za sve $(t, x) \in [a, b] \times [c, d]$ postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$, i da je $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$ neprekidna funkcija na $[a, b] \times [c, d]$.

Tada je funkcija $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ zadana sa $g(x) = \int_a^b F(t, x) dt$ derivabilna i vrijedi $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) dt$.

Dokaz

Prisjetimo se da iz Integrala funkcija više varijabli znamo analognu tvrdnju za realne funkcije:

Neka je $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za sve $(t, x) \in [a, b] \times [c, d]$ postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$, i da je $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)$ neprekidna funkcija na $[a, b] \times [c, d]$.

Tada je funkcija $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ zadana sa $g(x) = \int_a^b F(t, x)dt$ derivabilna i vrijedi $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(t, x)dt$.

(Vidi Teorem 11.1 u skriptama Integrali funkcija više varijabli, dostupno na web stranici https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/)

Neka je sada $z = x + iy = (x, y)$,
$f(t, z) = f(t, x, y) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$; tada je

$$g(z) = \int_a^b f(t, z)dt = \int_a^b u(t, x, y)dt + i\int_a^b v(t, x, y)dt = \\ = U(x, y) + iV(x, y).$$

Neka je sada $z = x + iy = (x, y)$,
$f(t, z) = f(t, x, y) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$; tada je

$$g(z) = \int_a^b f(t, z)dt = \int_a^b u(t, x, y)dt + i\int_a^b v(t, x, y)dt = \\ = U(x, y) + iV(x, y).$$

Po gornjoj tvrdnji za realne funkcije, U i V su derivabilne po x, y i njihove parcijalne derivacije dobivaju se deriviranjem pod znakom integrala.

Neka je sada $z = x + iy = (x, y)$,
$f(t, z) = f(t, x, y) = u(t, x, y) + iv(t, x, y)$; tada je

$$g(z) = \int_a^b f(t, z)dt = \int_a^b u(t, x, y)dt + i \int_a^b v(t, x, y)dt = \\ = U(x, y) + iV(x, y).$$

Po gornjoj tvrdnji za realne funkcije, U i V su derivabilne po x, y i njihove parcijalne derivacije dobivaju se deriviranjem pod znakom integrala.

Sada CR uvjeti za U, V slijede iz CR uvjeta za u, v, pa je g holomorfna, i vrijedi formula za $g'(z)$. $\square$

Teorem (generalizirana CIF za krug).

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Teorem (generalizirana CIF za krug).

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Tada za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Teorem (generalizirana CIF za krug).

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subset K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Tada za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Posebno, f ima derivaciju **svakog** reda.

Dokaz

Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Dokaz

Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt\right)$$

Dokaz

Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} dt \end{aligned}$$

Dokaz

Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw,
\end{aligned}$$

Dokaz

Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw, \end{aligned}$$

što daje tvrdnju za $n = 1$.

Dokaz

Prema CIF za krug,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw,
\end{aligned}$$

što daje tvrdnju za $n = 1$.

Na isti način se induktivno dokaže tvrdnja za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Korolar

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna na Ω. Pretpostavimo da je f derivabilna na Ω osim u točkama $w_1, \ldots, w_n \in \Omega$.

Korolar

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna na Ω. Pretpostavimo da je f derivabilna na Ω osim u točkama $w_1, \dots, w_n \in \Omega$.

Tada je f derivabilna i u točkama $w_1, \dots, w_n$, dakle na cijelom skupu Ω.

Korolar

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna na Ω. Pretpostavimo da je f derivabilna na Ω osim u točkama $w_1, \ldots, w_n \in \Omega$.

Tada je f derivabilna i u točkama $w_1, \ldots, w_n$, dakle na cijelom skupu Ω.

Dokaz. Promatrajmo prvo točku w_1. Neka je $r_1 > 0$ takav da je $K(w_1, r) \subseteq \Omega$ i $w_2, \ldots, w_n \notin K(w_1, r)$ (takav $r_1 > 0$ postoji jer je skup $\Omega \setminus \{w_2, \ldots, w_n\}$ otvoren skup).

Korolar

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna na Ω. Pretpostavimo da je f derivabilna na Ω osim u točkama $w_1, \dots, w_n \in \Omega$.

Tada je f derivabilna i u točkama $w_1, \dots, w_n$, dakle na cijelom skupu Ω.

Dokaz. Promatrajmo prvo točku w_1. Neka je $r_1 > 0$ takav da je $K(w_1, r) \subseteq \Omega$ i $w_2, \dots, w_n \notin K(w_1, r)$ (takav $r_1 > 0$ postoji jer je skup $\Omega \setminus \{w_2, \dots, w_n\}$ otvoren skup).

Dokažimo da je f derivabilna na $K(w_1, r_1)$ - to je dovoljno da zaključimo da je f derivabilna u w_1.

Kako je restrikcija funkcije f na $K(w_1, r_1)$ neprekidna na $K(w_1, r_1)$ i derivabilna na $K(w_1, r_1) \setminus \{w_1\}$, prema Korolaru Tehnička napomena s prošlog predavanja slijedi da f ima primitivnu funkciju F na $K(w_1, r_1)$.

Kako je restrikcija funkcije f na $K(w_1, r_1)$ neprekidna na $K(w_1, r_1)$ i derivabilna na $K(w_1, r_1) \setminus \{w_1\}$, prema Korolaru Tehnička napomena s prošlog predavanja slijedi da f ima primitivnu funkciju F na $K(w_1, r_1)$.

Iz $F'(z) = f(z), \forall z \in K(w_1, r_1)$ slijedi da je F derivabilna na $K(w_1, r_1)$.

Kako je restrikcija funkcije f na $K(w_1, r_1)$ neprekidna na $K(w_1, r_1)$ i derivabilna na $K(w_1, r_1) \setminus \{w_1\}$, prema Korolaru Tehnička napomena s prošlog predavanja slijedi da f ima primitivnu funkciju F na $K(w_1, r_1)$.

Iz $F'(z) = f(z), \forall z \in K(w_1, r_1)$ slijedi da je F derivabilna na $K(w_1, r_1)$.

Prema generaliziranoj CIF za krug, F ima derivaciju svakog reda, što znači da i f ima derivaciju svakog reda na $K(w_1, r_1)$. Slijedi da je f derivabilna u w_1.

Kako je restrikcija funkcije f na $K(w_1, r_1)$ neprekidna na $K(w_1, r_1)$ i derivabilna na $K(w_1, r_1) \setminus \{w_1\}$, prema Korolaru Tehnička napomena s prošlog predavanja slijedi da f ima primitivnu funkciju F na $K(w_1, r_1)$.

Iz $F'(z) = f(z), \forall z \in K(w_1, r_1)$ slijedi da je F derivabilna na $K(w_1, r_1)$.

Prema generaliziranoj CIF za krug, F ima derivaciju svakog reda, što znači da i f ima derivaciju svakog reda na $K(w_1, r_1)$. Slijedi da je f derivabilna u w_1.

Sada postupak ponovimo za ostale točke. $\square$

Primjer

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $z_0 \in \Omega$.

Primjer

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $z_0 \in \Omega$.

Definiramo funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0; \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Primjer

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $z_0 \in \Omega$.

Definiramo funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0; \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Već smo ustanovili, u dokazu CIF za krug, da je g neprekidna na Ω i derivabilna na $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Primjer

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $z_0 \in \Omega$.

Definiramo funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0; \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Već smo ustanovili, u dokazu CIF za krug, da je g neprekidna na Ω i derivabilna na $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Sada iz prethodnog korolara zaključujemo da je g derivabilna i u z_0, dakle na cijelom Ω.

Poseban slučaj je sljedeća funkcija, dobivena biranjem $z_0 = 0$ i $f(z) = \sin z$:

Poseban slučaj je sljedeća funkcija, dobivena biranjem $z_0 = 0$ i $f(z) = \sin z$:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Poseban slučaj je sljedeća funkcija, dobivena biranjem $z_0 = 0$ i $f(z) = \sin z$:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Zaključujemo da je g derivabilna na $\mathbb{C}$.

Liouvilleov teorem

Jedna od posljedica Cauchyjeve integralne formule je Liouvilleov teorem.

Liouvilleov teorem

Jedna od posljedica Cauchyjeve integralne formule je Liouvilleov teorem.

Najprije definiramo pojam *cijele funkcije*: to je funkcija koja je definirana i derivabilna na cijelom $\mathbb{C}$.

Liouvilleov teorem

Jedna od posljedica Cauchyjeve integralne formule je Liouvilleov teorem.

Najprije definiramo pojam *cijele funkcije*: to je funkcija koja je definirana i derivabilna na cijelom $\mathbb{C}$.

Liouvilleov teorem Svaka cijela ograničena funkcija je konstantna.

Dokaz

Neka je $M > 0$ takav da je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Želimo dokazati da je $f'(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$; tada slijedi da je f konstanta. Fiksirajmo $z = z_0$ i dokažimo $f'(z_0) = 0$.

Dokaz

Neka je $M > 0$ takav da je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Želimo dokazati da je $f'(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$; tada slijedi da je f konstanta. Fiksirajmo $z = z_0$ i dokažimo $f'(z_0) = 0$.

Za svaki $r > 0$ je kružnica

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$$

zajedno sa svojom unutrašnjošću sadržana u domeni funkcije f (zato je bitno da je f definirana na cijelom $\mathbb{C}$).

Dokaz

Neka je $M > 0$ takav da je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Želimo dokazati da je $f'(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$; tada slijedi da je f konstanta. Fiksirajmo $z = z_0$ i dokažimo $f'(z_0) = 0$.

Za svaki $r > 0$ je kružnica

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$$

zajedno sa svojom unutrašnjošću sadržana u domeni funkcije f (zato je bitno da je f definirana na cijelom $\mathbb{C}$).

Prema Generaliziranoj CIF za krug,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw.$$

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$|f'(z_0)| \quad = \quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw\right|$$

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\max\{\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2} : w \in \gamma_r([0,2\pi])\}\ell(\gamma_r) \end{aligned}$$

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$
\begin{aligned}
|f'(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\max\{\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2} : w \in \gamma_r([0,2\pi])\}\ell(\gamma_r) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2r\pi
\end{aligned}
$$

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\max\{\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2} : w\in\gamma_r([0,2\pi])\}\ell(\gamma_r) \\ &\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2r\pi \\ &= \frac{M}{r}. \end{aligned}$$

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max\{ \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2} : w \in \gamma_r([0, 2\pi]) \} \ell(\gamma_r) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot 2r\pi \\ &= \frac{M}{r}. \end{aligned}$$

Vidimo da vrijedi $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ za svaki $r > 0$. S obzirom da je $\lim_{r\to\infty} \frac{M}{r} = 0$ slijedi da je $f'(z_0) = 0$. □

Prema lemi o fundamentalnoj ocjeni integrala,

$$\begin{aligned}
|f'(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\max\{\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2} : w\in\gamma_r([0,2\pi])\}\ell(\gamma_r) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2r\pi \\
&= \frac{M}{r}.
\end{aligned}$$

Vidimo da vrijedi $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ za svaki $r > 0$. S obzirom da je $\lim_{r\to\infty}\frac{M}{r} = 0$ slijedi da je $f'(z_0) = 0$. $\square$

Osim funkcija definiranih na krugu, bit će nam bitne i funkcije definirane na kružnom vijencu. Zato dokazujemo:

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za kružni vijenac)

Neka je $V = V(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kružni vijenac sa središtem u z_0 radijusa r i R, te f derivabilna funkcija na V. Tada vrijedi

Teorem (Cauchyjeva integralna formula za kružni vijenac)

Neka je $V = V(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kružni vijenac sa središtem u z_0 radijusa r i R, te f derivabilna funkcija na V. Tada vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

gdje su γ_1 i γ_2 kružnice sa središtem u z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, redom, tako da je $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$.

Dokaz

Neka je $z \in V$ proizvoljno odabran. Definiramo funkciju

$$g : V \to \mathbb{C}, \quad g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z; \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Dokaz

Neka je $z \in V$ proizvoljno odabran. Definiramo funkciju

$$g : V \to \mathbb{C}, \quad g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z; \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Slično kao u dokazu CIF za krug zaključimo da je g derivabilna na V.

Dokaz

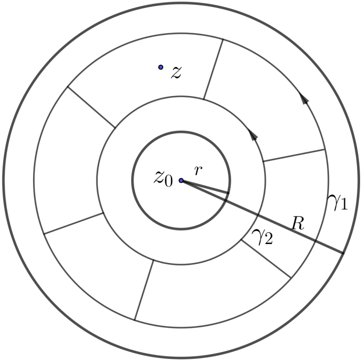
Neka je $z \in V$ proizvoljno odabran. Definiramo funkciju

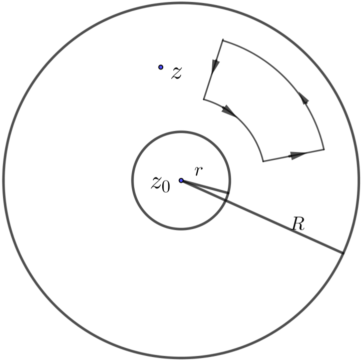
$$g : V \to \mathbb{C}, \quad g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z; \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Slično kao u dokazu CIF za krug zaključimo da je g derivabilna na V.

Uvodimo nove krivulje koje se mogu smjestiti u zvjezdaste podskupove od V, pa se za integrale po tim krivuljama može primijeniti Cauchyjev teorem za zvjezdast skup.

Tako se $\int_{\gamma_2} g - \int_{\gamma_1} g$ izražava kao suma integrala po zatvorenim i po dijelovima glatkim krivuljama (jedna od njih je izdvojena na slici desno).





Kako je g derivabilna funkcija na V, a svaka od manjih krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V, svaki od integrala po tim krivuljama jednak je nuli. Stoga je

Kako je g derivabilna funkcija na V, a svaka od manjih krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V, svaki od integrala po tim krivuljama jednak je nuli. Stoga je

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

Kako je g derivabilna funkcija na V, a svaka od manjih krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V, svaki od integrala po tim krivuljama jednak je nuli. Stoga je

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

odnosno

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w - z} = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w - z}.$$

Kako je g derivabilna funkcija na V, a svaka od manjih krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V, svaki od integrala po tim krivuljama jednak je nuli. Stoga je

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw,$$

odnosno

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w - z} = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w - z}.$$

Drugi integral s lijeve strane jednak je $f(z) \cdot 2\pi i$ (Lema s prošlog predavanja), a drugi integral na desnoj strani je jednak nuli po Cauchyjevom teoremu za zvjezdasti skup.

Kako je g derivabilna funkcija na V, a svaka od manjih krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V, svaki od integrala po tim krivuljama jednak je nuli. Stoga je

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw,$$

odnosno

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_{\gamma_2} \frac{dw}{w-z} = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z}.$$

Drugi integral s lijeve strane jednak je $f(z) \cdot 2\pi i$ (Lema s prošlog predavanja), a drugi integral na desnoj strani je jednak nuli po Cauchyjevom teoremu za zvjezdasti skup.

Slijedi

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw,$$

odakle tvrdnja odmah slijedi izražavanjem $f(z)$.

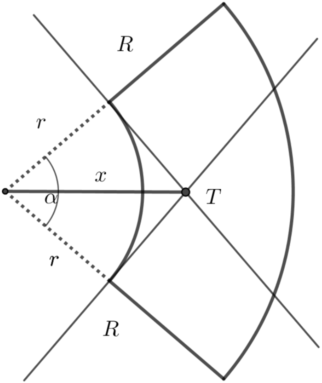
Preostaje dokazati da je doista moguće podijeliti kružni vijenac V na isječke kao gore, koji su sadržani u zvjezdastim podskupovima od V.

Preostaje dokazati da je doista moguće podijeliti kružni vijenac V na isječke kao gore, koji su sadržani u zvjezdastim podskupovima od V.

Za to je dovoljno dokazati da je za dovoljno mali kut α isječak kružnog vijenca V sa središnjim kutem α zvjezdast skup.

Preostaje dokazati da je doista moguće podijeliti kružni vijenac V na isječke kao gore, koji su sadržani u zvjezdastim podskupovima od V.

Za to je dovoljno dokazati da je za dovoljno mali kut α isječak kružnog vijenca V sa središnjim kutem α zvjezdast skup.



Neka je T sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku).

Neka je T sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku).

Isječak će biti zvjezdast ako je točka T unutar isječka, odnosno ako je udaljenost x od T do središta kružnog vijenca manja od R. (Tada upravo T možemo uzeti za centar zvjezdastog skupa.)

Neka je T sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku).

Isječak će biti zvjezdast ako je točka T unutar isječka, odnosno ako je udaljenost x od T do središta kružnog vijenca manja od R. (Tada upravo T možemo uzeti za centar zvjezdastog skupa.)

Kako je

$$x = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

Neka je T sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku).

Isječak će biti zvjezdast ako je točka T unutar isječka, odnosno ako je udaljenost x od T do središta kružnog vijenca manja od R. (Tada upravo T možemo uzeti za centar zvjezdastog skupa.)

Kako je

$$x = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$x < R$ je ekvivalentno sa $\cos \frac{\alpha}{2} > \frac{r}{R}$, odnosno s

$$\alpha < 2 \arccos \frac{r}{R}.$$

Neka je T sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku).

Isječak će biti zvjezdast ako je točka T unutar isječka, odnosno ako je udaljenost x od T do središta kružnog vijenca manja od R. (Tada upravo T možemo uzeti za centar zvjezdastog skupa.)

Kako je

$$x = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$x < R$ je ekvivalentno sa $\cos \frac{\alpha}{2} > \frac{r}{R}$, odnosno s

$$\alpha < 2 \arccos \frac{r}{R}.$$

To je ispunjeno za dovoljno mali kut α. $\square$

Opći Cauchyjev teorem

Ovaj dio teorije izlažemo samo informativno; rezultati ove točke neće se koristiti u ostatku predavanja.

Opći Cauchyjev teorem

Ovaj dio teorije izlažemo samo informativno; rezultati ove točke neće se koristiti u ostatku predavanja.

Vidjeli smo da Cauchyjev teorem vrijedi za zvjezdast skup Ω, ali ne vrijedi za svako područje Ω; npr. ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Opći Cauchyjev teorem

Ovaj dio teorije izlažemo samo informativno; rezultati ove točke neće se koristiti u ostatku predavanja.

Vidjeli smo da Cauchyjev teorem vrijedi za zvjezdast skup Ω, ali ne vrijedi za svako područje Ω; npr. ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Postavlja se pitanje da li vrijedi za općenitije skupove od zvjezdastih.

Opći Cauchyjev teorem

Ovaj dio teorije izlažemo samo informativno; rezultati ove točke neće se koristiti u ostatku predavanja.

Vidjeli smo da Cauchyjev teorem vrijedi za zvjezdast skup Ω, ali ne vrijedi za svako područje Ω; npr. ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Postavlja se pitanje da li vrijedi za općenitije skupove od zvjezdastih.

Vidjet ćemo da Cauchyjev teorem vrijedi za jednostavno povezana ili 1-povezana područja, koja su intuitivno govoreći područja "bez rupa".

Primijetimo također da smo za funkciju $1/z$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vidjeli da njezin integral po jediničnoj kružnici oko ishodišta nije 0.

Primijetimo također da smo za funkciju $1/z$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vidjeli da njezin integral po jediničnoj kružnici oko ishodišta nije 0.

Međutim ista funkcija ima integral nula po mnogim drugim krivuljama u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - na primjer, po svakoj kružnici koja ne sadrži ishodište u svojoj unutrašnjosti.

Primijetimo također da smo za funkciju $1/z$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vidjeli da njezin integral po jediničnoj kružnici oko ishodišta nije 0.

Međutim ista funkcija ima integral nula po mnogim drugim krivuljama u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - na primjer, po svakoj kružnici koja ne sadrži ishodište u svojoj unutrašnjosti.

Intuitivno, te se druge kružnice mogu "neprekidno stisnuti u točku" unutar $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dok se to ne može napraviti za jediničnu kružnicu oko ishodišta.

Homotopija

Da bismo točnije definirali "neprekidno stiskanje", uvodimo pojam homotopije.

Homotopija

Da bismo točnije definirali "neprekidno stiskanje", uvodimo pojam homotopije.

Neka su $\alpha, \beta : [a, b] \to \Omega$ dva puta u Ω, oba od z_1 do z_2, tj. $\alpha(a) = \beta(a) = z_1$, $\alpha(b) = \beta(b) = z_2$.

Homotopija

Da bismo točnije definirali "neprekidno stiskanje", uvodimo pojam homotopije.

Neka su $\alpha, \beta : [a, b] \to \Omega$ dva puta u Ω, oba od z_1 do z_2, tj. $\alpha(a) = \beta(a) = z_1$, $\alpha(b) = \beta(b) = z_2$.

Kažemo da su α i β homotopni ako postoji neprekidna funkcija

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega,$$

takva da je

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), \qquad & H(s, 1) &= \beta(s), \quad \forall s \in [a, b]; \\ H(a, t) &= z_1, \qquad & H(b, t) &= z_2, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Funkciju H možemo zamišljati kao familiju krivulja $s \mapsto H(s,t)$ indeksiranu parametrom t, ili kao "putujuću krivulju"od z_1 do z_2, koja je u trenutku t jednaka krivulji $s \mapsto H(s,t)$ i koja se neprekidno kreće od α (za $t = 0$) do β (za $t = 1$).

Funkciju H možemo zamišljati kao familiju krivulja $s \mapsto H(s,t)$ indeksiranu parametrom t, ili kao "putujuću krivulju"od z_1 do z_2, koja je u trenutku t jednaka krivulji $s \mapsto H(s,t)$ i koja se neprekidno kreće od α (za $t = 0$) do β (za $t = 1$).

Nas posebno zanima slučaj kad su α i β zatvoreni putevi odnosno petlje, tj. početak i kraj im je isti kompleksni broj $z_0 \in \Omega$.

Funkciju H možemo zamišljati kao familiju krivulja $s \mapsto H(s,t)$ indeksiranu parametrom t, ili kao "putujuću krivulju"od z_1 do z_2, koja je u trenutku t jednaka krivulji $s \mapsto H(s,t)$ i koja se neprekidno kreće od α (za $t=0$) do β (za $t=1$).

Nas posebno zanima slučaj kad su α i β zatvoreni putevi odnosno petlje, tj. početak i kraj im je isti kompleksni broj $z_0 \in \Omega$.

Kažemo da je petlja $\alpha : [a,b] \to \Omega$ nul-homotopna u Ω, ako je homotopna konstantnom putu

$$\gamma(s) = z_0, \qquad s \in [a,b].$$

Funkciju H možemo zamišljati kao familiju krivulja $s \mapsto H(s,t)$ indeksiranu parametrom t, ili kao "putujuću krivulju" od z_1 do z_2, koja je u trenutku t jednaka krivulji $s \mapsto H(s,t)$ i koja se neprekidno kreće od α (za $t = 0$) do β (za $t = 1$).

Nas posebno zanima slučaj kad su α i β zatvoreni putevi odnosno petlje, tj. početak i kraj im je isti kompleksni broj $z_0 \in \Omega$.

Kažemo da je petlja $\alpha : [a,b] \to \Omega$ nul-homotopna u Ω, ako je homotopna konstantnom putu

$$\gamma(s) = z_0, \qquad s \in [a,b].$$

Kažemo da je područje Ω 1-povezano ako je svaka petlja u Ω nul-homotopna u Ω.

Opći Cauchyjev teorem

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija.
Tada:

Opći Cauchyjev teorem

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Tada:

1. Za svaku po dijelovima glatku petlju γ u Ω koja je nul-homotopna u Ω, $\int_\gamma f = 0$.

Opći Cauchyjev teorem

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija.
Tada:

1. Za svaku po dijelovima glatku petlju γ u Ω koja je nul-homotopna u Ω, $\int_\gamma f = 0$.
2. Ako je Ω 1-povezano područje, onda je $\int_\gamma f = 0$ za svaku po dijelovima glatku petlju u Ω.

Indeks PDG petlje

Indeks po dijelovima glatke petlje γ u odnosu na točku z koja nije u slici od γ definira se kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

Indeks PDG petlje

Indeks po dijelovima glatke petlje γ u odnosu na točku z koja nije u slici od γ definira se kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw.$$

Indeks $\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka γ oko z u smjeru suprotno od kazaljke na satu.

Indeks PDG petlje

Indeks po dijelovima glatke petlje γ u odnosu na točku z koja nije u slici od γ definira se kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

Indeks $\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka γ oko z u smjeru suprotno od kazaljke na satu.

Na primjer, ako je γ pozitivno orijentirana kružnica, onda znamo da je $\nu(\gamma, z) = 1$ za z unutar γ, i da je $\nu(\gamma, z) = 0$ za z izvan γ.

Indeks PDG petlje

Indeks po dijelovima glatke petlje γ u odnosu na točku z koja nije u slici od γ definira se kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

Indeks $\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka γ oko z u smjeru suprotno od kazaljke na satu.

Na primjer, ako je γ pozitivno orijentirana kružnica, onda znamo da je $\nu(\gamma, z) = 1$ za z unutar γ, i da je $\nu(\gamma, z) = 0$ za z izvan γ.

Lako je vidjeti da je funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ neprekidna; ona je štoviše lokalno konstantna.

Opća Cauchyjeva integralna formula

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija.

Opća Cauchyjeva integralna formula

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija.

Neka je γ po dijelovima glatka nul-homotopna petlja u Ω i neka je z kompleksan broj koji nije u slici od γ.

Opća Cauchyjeva integralna formula

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija.

Neka je γ po dijelovima glatka nul-homotopna petlja u Ω i neka je z kompleksan broj koji nije u slici od γ.

Tada je

$$\nu(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Opća Cauchyjeva integralna formula

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija.

Neka je γ po dijelovima glatka nul-homotopna petlja u Ω i neka je z kompleksan broj koji nije u slici od γ.

Tada je

$$\nu(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Zadatak. Dokažite opću Cauchyjevu integralnu formulu koristeći opći Cauchyjev teorem.